学校编号： 10384　　　　分类号：＿＿＿＿密级：＿＿＿＿
学　　号： 200423016　　　　UDC:＿＿＿＿＿＿＿＿

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

统计收敛的测度理论

Measure Theory of Statistical Convergence

柳　　辉

指导教师姓名： 程 立 新　教 授

专 业 名 称： 基　础　数　学

论文提交日期： 2007 年 5 月

论文答辩日期： 2007 年　月

学位授予日期： 2007 年　月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿＿

评阅人：＿＿＿＿＿＿＿＿

2007 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果. 本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明. 本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任.

责任人 (签名):

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留，使用学位论文的规定．厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版．保密的学位论文在解密后适用本规定．

本学位论文属于

1. 保密（ ），在　　　　年解密后适用本授权书．

2. 不保密（ ）．

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名：　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

目　　录

Contents

摘　要

早在 1951 年， H.Fast[43] 就引入了统计收敛的定义，之后，出现了一系列的相关文章 (1-20,45-52,48,49,74,74,21-42,53-56,58-64,66,67,72,73,76-98,100-102,104-131) 对统计收敛做了进一步的探索与研究. 随着统计收敛理论的发展, 建立统计收敛测度理论的问题也逐渐成为一个核心问题，因为一种合理的理论不仅是把各种统计收敛统一起来的原则，而且是统计收敛通向测度理论，积分理论，概率论和数理统计的桥梁. 基于这个原因，证明了以下结论：

1　定义在由 N 的所有子集生成的 σ- 代数 $\mathscr{A}$ 上的所有有限可加概率测度的表示理论.

2　每个如 1 中的有限可加概率测度都可以唯一的分解为一个可列可加概率测度和一个统计测度（即一个有限可加概率测度 μ, 对任意的单点集 $\{k\}$ 有 $\mu(k)=0$ ）的凸组合.

本文同样证明了许多经典统计测度的性质，例如：

3　由所有经典统计测度组成的集合 $\mathscr{S}$ 在 $\mathscr{A}$ 上赋予逐点收敛的拓扑就成为紧凸的 Hausdorff 空间.

4　每一个经典统计测度都是连续型的 (所以是无原子的).

5　对 N 中的任意的集合, 每一类特殊的统计测度都满足 complementation minmax 原则.

6　每一类统计收敛都可以统一为统计测度的收敛.

关键词：统计收敛；统计测度；次微分

Abstract

The notion of statstical convergence was introduced by Fast[43]in 1951. From then on, statistical convergence had been investigated and developed in a sequence of articals(see, for instance, [1-20,45-52,48,49,74,75,21-42,53-56,58-64,66,67,72,73,76-98,100-102,104-131]. with the development of statistical convergence, the question of establishing measure theory for statistical convergence has been moving closer to center stage, since a kind of reasonable theory is not only fundamental for unifying various kinds of statistical convergence, but also a bridge linking the study of statistical convergence across measure theory, integration theory, probability and statistics. For this reason, this paper shows many theorems as follows.

1 A representation theorem for all finitely additive probability measures defined on the σ-algebra $\mathscr{A}$ of all subsets of N.

2 Proves that every such measure can be uniquely decomposed into a convex combination of a countably additive probability measure and a statistical measure (i.e. a finitely additive probability measure μ with $\mu(k) = 0$ for all singletons $\{k\}$).

This paper also shows that classical statistical measures have many nice properties, such as:

3 The set $\mathscr{S}$ of all such measures endowed with the topology of pointwise convergence on $\mathscr{A}$ forms a compact convex Hausdorff space.

4 Every classical statistical measure is of continuity type (hence, atomless).

5 Every specific class of statistical measures fits a complementation minimax rule for every subset in N.

6 This paper shows that every kind of statistical convergence can be unified in convergence of statistical measures.

Keywords：statistical convergence; statistical measure; subdifferential

第一章 绪 论

自 1951 年, $H.Fast$[43] 引入了统计收敛的定义之后, 统计收敛得到了广泛的讨论和深入的研究, 后来有许多的数学家和学者加以推广和发展. 例如 J.Connor[12-20], J.A.Fridy, H.I.Miller 和 C.Orhan [45-52],[48,49], [74,75], 还有许多如 [1-11], [21-42], [53-56], [58-64], [66,67], [72,73], [76-98], [100-102] 和 [104-131]). 自从上个世纪 90 年代, 统计收敛就已经成为人们研究的热点问题. 它曾出现在许多的研究领域. 例如矩阵求和，级数，积分 [13, 14, 15, 21, 25, 47, 61, 71, 102, 119], Fourior 分析 [77,78,91], 正算子的逼近 [28-32,34,35, 38,39,53,93], 数论 [19], 三角级数 [27,44,105,131], Banach 空间理论 [16,54,128], 局部凸空间 [4,69,98,100], 有界连续函数理想的结构 [19], 模糊数学 [87,90,110], 连续函数的性质 [18], [55], 构造许多新型拓扑线性空间 [58,61,112,122,124], 等等, 极大的丰富了统计收敛理论.

1951 年, $H.Fast$[43] 给出了统计收敛的定义, 对自然数集 N 的任意一个子集 A, 令 $A^\sharp$ 表示 A 的基数, A_n={$k\in A$: $k\leq n$} (n=1,2,$\cdots$). Banach 空间 X 中的序列 $\{x_k\}$ 称为是统计收敛到 $x\in X$, 若对任意的 $\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n(\epsilon)^\sharp}{n}=0$, 其中 $A_n(\varepsilon)$={k$\in N$: $\|x_k-x\|\geq\varepsilon$, k$\leq$n}.

显然统计收敛是收敛的一种推广，收敛要求对任意的 $\varepsilon>0,\{k:\|x_k-x\|>\varepsilon\}$ 为有限集；而且统计收敛还可以是无界的. 自从有了统计收敛的定义，许多数学专家与学者，特别具有代表性的有 $J.Fridy$, $J.Maddox$ 和 $J.Connor$ 等对统计收敛的研究就没有停止过. 1988 年 $J.Maddox$ 将统计收敛的研究领域进一步推广到局部凸空间中. 设 X 是局部凸的 T_2 空间，其拓扑是由 X 上连续半范族 Q 所生成，称 X 中序列 $\{x_k\}$ 统计收敛于 $x\in X$, 如果 $\forall\ \varepsilon>0,\forall\ q\in Q$ 都有

$$\frac{1}{n}\{k\leq n:q(x_k-x)>\varepsilon\}^\sharp\to 0\quad(n\to\infty).$$

并通过引进模函数 [69] 的定义，对局部凸空间 X 中的序列做了归类. 直到 2000 年， $J.Connor, M.Ganichev$ 和 $V.Kadets$[16] 在 $Banach$ 空间中类似地给出了统计收敛与弱统计收敛的定义. 设 X 是 $Banach$ 空间， X^* 为 X 的对偶空间, $\{x_k\}\subset X, x\in X$, 称 $\{x_k\}$ 统计收敛于 $x\in X$, 如果 $\forall\ \varepsilon>0$, 都有

$$\frac{1}{n}\{k\leq n:\parallel x_k-x\parallel>\varepsilon\}^\sharp\to 0\quad(n\to\infty);$$

称 $\{x_k\}$ 弱统计收敛于 $x\in X$, 如果 $\forall\ x^*\in X^*,\{x^*(x_k-x)\}$ 统计收敛于 0; 称 $\{x_k\}$ 为弱统计 0 序列，如果 $\{x_k\}$ 弱统计收敛于 0.

鉴于不同的目的，又出现了许多其他形式的统计收敛.

1989 年， J.Connor [15] 提出了 A- 统计收敛的定义，假设 $A=(a_{ij})_{N\times N}$ 是一个正则可和矩阵，且对任意的 $i\in N$ 有 $a_{ij}\geq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=1$. 我们称 X 中的序列 $\{x_n\}$ 是 A- 统计收敛到 x 的，若对任意的 $\varepsilon>0$

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j\in A(\varepsilon)}a_{ij}=0$$

其中 $A(\varepsilon)=\{k\in N:\|x_k-x\|\geq\varepsilon\}$. 后来有很多的数学家加以引用和发展，例如 J.Connor [12-20], H.I.Miller [74,75], E.Kolk [60-63], J.A.Fridy M.K.Khan [46,47], K.Demirici [23-26], E.Savas [108-116], J.Zeager [130,131], T.Bilgin [2-6], O.Duman, M.K.Khan, C.Orhan [32-36]. 现在成为一个非常普遍和有用的概念. 在 1993 年 J.A.Fridy 和 C. Orhan [50] 介绍了 lacunary 统计收敛的概念，序列 $\{x_n\}$ 称为是 lacunary 统计收敛到 x 的，若对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\triangle_k^{-1}\{j\in(n_{k-1},n_k]:\|x_j-x\|\geq\varepsilon\}^\sharp=0$$

其中 $\triangle_k=n_k-n_{k-1}$, $k\in N$. 后来 Mursaleen [81] 引入了一个类似的定义就是 λ- 统计收敛. 假设 $\{\lambda_n\}$ 为不减的正数序列，记 $\lambda=\{\lambda_n\}$ 其中 $\lambda_1=1$, 且对任意的 $n\in N$ 有 $\lambda_{n+1}\leq\lambda_n+1$. 序列 $\{x_n\}$ 称为是 λ- 统计收敛到 x 的，若满足

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n^{-1}\{k\in(n-\lambda_n,n]:\|x_k-x\|\geq\varepsilon\}=0\quad\text{对任意的 }\varepsilon>0$$

1994 年，S.Pehlivan [95] 介绍了一致统计收敛的的概念，后来由 L.Leindler [63] 和 G.G.Lorentz [64], E.Savas [107-113] 介绍了 almost 统计收敛的概念（恰好是一致统计收敛）和 almost λ- 统计收敛的概念，我们称它们为强统计收敛和强 λ- 统计收敛。我们称 $\{x_n\}$ 是强统计收敛到 x 的，若对任意的 $\varepsilon>0$, 对 m 一致的有

$$\lim_n\frac{1}{n}\{k\leq n:\|x_{k+m}-x\|>\varepsilon\}^\sharp=0$$

我们称 $\{x_n\}$ 是强 λ- 统计收敛到 x 的，若对任意的 $\varepsilon>0$ ，对 m 一致的有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\{k\in(n-\lambda_n,n]:\|x_{k+m}-x\|>\varepsilon\}^\sharp=0$$

类似的还有许多其它形式的统计收敛，例如双序列统计收敛 [9,22,78, 83,120], μ- 稠密收敛 [33], $\mathscr{B}$- 统计收敛 [84], $\overline{S}$- 统计和 (ϖ,λ)- 统计收敛 [11], $\widehat{S}$- 收敛 [107,108] 等等，在这里就不做一一介绍了.

那我们很自然的就会想到有没有一种理论把各种统计收敛统一起来呢？本文给出了肯定的答案.

建立测度理论这个问题已经成为核心问题，因为一种合理的理论不仅是把各种统计收敛统一起来的原则，而且是统计收敛通向测度理论，积分理论，概率论和数理统计的桥梁. 建立测度理论的难度在于对自然数集 N 的所有子集 A 中满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n^\sharp}{n}$ 存在的子集，即不是一个 σ 代数又对有限交运算不封闭.

为了为统计收敛建立测度理论，令 $\mathscr{P}$ 为定义在 N 上的所有有限可加概率测度集合，在第三章第一节中，我们证明了集合 $\mathscr{P}$ 的表示理论.

定理 1 令 $\mathscr{P}$ 为定义在 N 上的所有有限可加概率测度， $\mu\in\mathscr{P}$, $\mu:2^N\to[0,1]$, 令 $\mathscr{D}$ 为 ℓ^∞ 上自然范数 $\|\cdot\|$ 在 $e=(1,1,\cdots)$ 点的次微分映射，则

$$\mathscr{P}=\mathscr{D}\circ\pi\equiv\{x^*\circ\pi : x^*\in\partial\|e\|\}$$

其中 $\pi:2^N\to\{0,1\}^N$ 定义为 $\pi(A)=(\chi_A(i))_{i=1}^\infty$, χ_A 为 $A\subset N$ 的特征函数, $\partial\|e\|$ 表示自然范数 $\|\cdot\|$ 在 e 的次微分映射.

一个有限可加概率测度 μ 称为是统计测度，若对 N 中的任意单点集 $\{k\}$ ，有 $\mu(k)=0$. 下面的关于统计测度的表示定理和分解定理将在第三章第二节中给予证明.

定理 1.2 令 $\mathscr{S}$ 为定义在 N 上的所有统计测度集合，令 $q:\ell^\infty\to R^+$ 定义为

$$q(x)=\limsup_n|x(n)|,\ \ x\in\ell^\infty$$

则 $\mathscr{S}=\partial q(e)\circ\pi$.

定理 1.3 令 $\mathscr{C}$ 为定义在 N 上的所有可数可加的概率测度，对任意的 $j\in N$ ， δ_j 为 N 上的退化的概率测度 (即 $\delta_j(k)=\delta_{jk}=1,k=j;=0,k\neq j$), 则

(i) $\mathscr{C}=\overline{co}(\delta_j)_{j=1}^\infty$;

(ii) $\mathscr{P}=co(\mathscr{C}\bigcup\mathscr{S})$, 即 $\mathscr{P}$ 为 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{S}$ 的凸包.

有限可加概率测度 μ 称之为经典统计测度，若对任意的 $A\in\mathscr{A}$, 有 $\mu(A)=\lim_n\frac{A_n^\sharp}{n}$, 其中 $\lim_n\frac{A_n^\sharp}{n}$ 存在. 经典统计测度的许多性质在第三章第三节中给出，例如：

定理 1.4 经典统计测度集合赋予 $\mathscr{A}$ 上逐点收敛的拓扑为紧凸 Hansdorff 空间.

定理 1.5 **令** $\mathscr{K}$ **为** N **上的所有经典统计测度集合，则对任意的** $A \in \mathscr{A}$ **，**

$$\min_{\mu\in\mathscr{K}} \mu(A) + \max_{\mu\in\mathscr{K}} \mu(N\backslash A) = 1$$

定理 1.6 **若** $\mu \in \mathscr{S}$, $A \in \mathscr{A}$ **且** $\mu(A) = a$. **假设** $\lambda_i \geq 0$ **且** $\sum_i \lambda(i) = 1$, **则存在** A **的可数分划** $\{A_i\}$ (**即** $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$, **且若** $i \neq j$ **则** $A_i \bigcap A_j = \emptyset$) **使得** $\mu(A_i) = \lambda_i a$ **对任意的** $i \in N$ **成立.**

在第三章第四节中，我们将介绍每一类的统计收敛恰好是相对于 $\mathscr{S}$ **中的一类特殊统计测度的测度收敛.**

第二章　基本概念与性质

为了行文与读者阅读的方便，先将统计收敛理论中常用的记号和本文中将用到的概念及其性质简述如下：字母 N, Z, Q, R 分别表示自然数集，整数集，有理数集和实数集．我们用 $\mathscr{A}=2^N$ 表示自然数集 N 的所有子集生成的 σ- 代数．对于一个集合 A, χ_A 表示 A 的特征函数，即，若 $x\in A, \chi_A(x)=1$；若 $x\in N\backslash A$, $\chi_A(x)=0$. $\mathscr{S}$ 为定义在 N 上的所有统计测度集合， $\mathscr{P}$ 为定义在 N 上的所有有限可加概率测度， $\mathscr{C}$ 为定义在 N 上的所有可数可加的概率测度， $\mathscr{K}$ 为 N 上的所有经典统计测度集合， $\mathscr{D}$ 为 ℓ^∞ 上在 $e=(1,1,\cdots)$ 点的自然范数 $\|\cdot\|$ 的次微分映射， D 表示 ℓ^∞ 的子集合 $\{0,1\}^N$.

定义 2.1　假设 μ 为定义在 $\mathscr{A}$ 上的非负值函数． μ 称之为 N 上的有限可加概率测度，若满足

(i) $\mu(\emptyset)$=0 且 $\mu(N)$=1;

(ii) $\mu(A\cup B)$=$\mu(A)+\mu(B)$ 对任意的 $A,B\in\mathscr{A}$ 且 $A\cap B=\emptyset$.

定义 2.2[99]：　假设 f 是 Banach 空间 X 上的连续凸函数．则 f 在 $x\in X$ 点的次微分映射定义为：

$$\partial f(x)=\{x^*\in X^*: f(x+y)-f(x)\geq\langle x^*,y\rangle\ \text{对任意的}\ \ y\in X\}.$$

性质 2.3[99]：　假设 f 为定义在 Banach 空间 X 上的连续凸函数．则 f 的次微分映射 ∂f 为非空紧凸集，且在 X 中每个点处是范 -w^* 上半连续的．

性质 2.4[103]$(Hahn-Banach$ 定理)：　设 X 为实向量空间，$p: X\longrightarrow\mathbb{R}$ 为次线性泛函， $M\subset X$ 为子空间， $f: X\longrightarrow\mathbb{R}$ 为线性泛函，且 $f\leq p\quad on\quad M$; 则 $\exists\wedge: X\longrightarrow\mathbb{R}$ 为线性泛函，满足： $\wedge\leq p\quad on\quad X$ 且 $\wedge|_M=f$.

性质 2.5[103] :$(Krein-Milman$ 定理)：　令 K 是局部凸空间 X 的紧凸集，则 K 是它的端点的闭凸包，即 $K=\overline{co}(\mathtt{Ext}K)$.

性质 2.6[99]：　假设 p 为定义在 Banach 空间 X 上的连续 Minkowski 泛函，令 $C^*=\{x^*\in X^*:\langle x^*,x\rangle\leq p(x)$ 对任意的 $x\in X\}$ 对给定的 $x\in X$, 则 $x^*\in\partial p(x)$ 当且仅当 $x^*\in C^*$ 且 $\langle x^*,x\rangle$=$p(x)$.

第三章 统计收敛的测度理论

§ 3.1 有限可加测度的表示

在本文中，我们用 $\mathscr{A}=2^N$ 表示自然数集 N 的所有子集生成的 σ- 代数. 对于一个集合 A, χ_A 表示 A 的特征函数，用 D 表示 ℓ^∞ 中的子集合 $\{0,1\}^N$. $\pi:\mathscr{A}\to D$, 定义为 $\pi(A)=(x_A(i))_{i=1}^\infty$, 也可以标记为 $x_A=(\chi_A(i))_{i=1}^\infty\in D$; e 表示单位向量 $(1,1,\cdots)$, e_i 为 ℓ^∞ 中的标准单位向量 $\{\delta_{ij}\}_{j=1}^\infty$ (对任意的 $i\in N$), δ_j $(j=1,2,\cdots)$ 表示 N 上的退化的概率测度，即，对每个固定的 $j\in N$, $\delta_j(k)=\delta_{jk}$ 对任意的 $k\in N$.

定义 3.1.1 假设 μ 为定义在 $\mathscr{A}$ 上的非负值函数. μ 称之为 N 上的有限可加概率测度，若满足

(i) $\mu(\emptyset)$=0 且 $\mu(N)$=1;

(ii) $\mu(A\cup B)$=$\mu(A)+\mu(B)$ 对任意的 $A,B\in\mathscr{A}$ 且 $A\cap B=\emptyset$.

定义 3.1.2 定义在 N 上的有限可加概率测度 μ 称之为统计测度，若对任意的单点集 $\{k\}\subset N$ 有 $\mu(k)=0$.

性质 3.1.3 假设 μ 为一个统计测度，则

(i) 对任意的一个有限子集 A$\in\mathscr{A}$, $\mu(A)$=0.

(ii) μ 是完备的，即若 $A,B\in\mathscr{A}$ 且 $A\subset B$, 若 $\mu(B)$=0 则 $\mu(A)$=0.

定义 3.1.4 假设 f 是 Banach 空间 X 上的连续凸函数. 则 f 在 $x\in X$ 点的次微分映射定义为:

$$\partial f(x)=\{x^*\in X^*: f(x+y)-f(x)\geq\langle x^*,y\rangle \text{ 对任意的 } y\in X\}.$$

性质 3.1.5 假设 f 为定义在 Banach 空间 X 上的连续凸函数. 则 f 的次微分映射 ∂f 为非空紧凸集，且在 X 中每个点处是范 -w^* 上半连续的.

性质 3.1.6 假设 p 为定义在 Banach 空间 X 上的连续 Minkowski 泛函，令 $C^*=\{x^*\in X^*:\langle x^*,x\rangle\leq p(x)$ 对任意的 $x\in X\}$ 对给定的 $x\in X$, 则 $x^*\in\partial p(x)$ 当且仅当 $x^*\in C^*$ 且 $\langle x^*,x\rangle$=$p(x)$.

定理 3.1.7 假设 μ 为定义在 N 上的有限可加概率测度，则存在 $x^*\in\mathscr{D}$, 使

$$\langle x^*,x_A\rangle\equiv\langle x^*,\pi(A)\rangle=\mu(A) \text{ 任意的 } A\in\mathscr{A}.$$

证明： 令 $\mathscr{B}=\{A\bigcup -B:$ 对任意的 $A,B\in\mathscr{A}\}$. 首先把 μ 延拓为 $N\bigcup -N$ 上的实值有限可加测度，即

$$\mu(A\bigcup -B)=\mu(A)-\mu(B),\quad A,B\in\mathscr{A}$$

令 $\pi:\mathscr{B}\to D-D=\{-1,0,1\}^N\subset\ell^\infty$, 即: $\pi(A\bigcup -B)=\pi(A)-\pi(B)\equiv x_A-x_B$. 其次定义 $D-D$ 上的函数 x_D^* 如下:

$$\langle x_D^*,x_{A\bigcup -B}\rangle=\langle x_D^*,x_A\rangle-\langle x_D^*,x_B\rangle=\mu(A)-\mu(B)$$

我们标记 G 为由 $D-D$ 生成的 Abelian 群，即:

$$G=\{\sum_{i=1}^n x_i:n\in N,\ \ x_i\in D-D,\ \ 1\le i\le n\}$$

（显然 G 恰好是由 Z 的所有有界序列组成的群），现在，把 x_D^* 从 $D-D$ 延拓到 G 标记为 x_G^* 如下:

$$\langle x_G^*,\sum_{i=1}^n x_i\rangle=\sum_{i=1}^n\langle x_D^*,x_i\rangle,\quad n\in N,\quad x_i\in D-D$$

下面我们验证 x_G^* 在 G 上是有意义的. 我们只须证明当 $\sum_{i=1}^n x_i=0$ 时有 $\sum_{i=1}^n\langle x_D^*,x_i\rangle=0$. 令 $x_i=x_{A_i}-x_{B_i}$ 其中 $A_i,B_i\in\mathscr{A}$. 对任意的 $j\in N$, 令

$$F_j^+=\{k\in N:\sum_{i=1}^n x_{A_i}(k)=j\}\qquad \text{和}\qquad F_j^-=\{k\in N:\sum_{i=1}^n x_{B_i}(k)=j\}$$

显然对任意的 $j=1,2,\cdots,n$ ， $F_j^+=F_j^-$. 对任意的 $i\neq j$ ， $F_i^\pm\bigcap F_j^\pm=\emptyset$,

$$\sum_{j=1}^n jx_{F_j^+}=\sum_{i=1}^n x_{A_i}\qquad \text{和}\qquad \sum_{j=1}^n jx_{F_j^-}=\sum_{i=1}^n x_{B_i}$$

因此,

$$\sum_{i=1}^n\langle x_D^*,jx_{F_j^+}\rangle=\sum_{j=1}^n j\langle x_D^*,x_{F_j^+}\rangle=\sum_{j=1}^n j\mu(F_j^+)$$

$$\sum_{i=1}^n\langle x_D^*,jx_{F_j^-}\rangle=\sum_{j=1}^n j\langle x_D^*,x_{F_j^-}\rangle=\sum_{j=1}^n j\mu(F_j^-)$$

更进一步有

$$\sum_{i=1}^n\langle x_D^*,x_i\rangle=\sum_{i=1}^n\langle x_D^*,x_{A_i}\rangle-\sum_{i=1}^n\langle x_D^*,x_{B_i}\rangle=\sum_{j=1}^n j\mu(F_j^+)-\sum_{j=1}^n j\mu(F_j^-)=0$$

记

$$QG = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i : n \in N,\ \ r_i \in Q,\ \ x_i \in G\}$$

把 x_G^* 从 G 延拓到 QG, 即,

$$\langle x_Q^*, \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} r_i \langle x_G^*, x_i \rangle$$

很明显这个延拓是很自然的所以 x_Q^* 是有意义的. 我们很容易得到 x_Q^* 的如下性质:

$$\langle x_Q^*, x \rangle \geq 0 \ \ 当\ \ x \in QG\ \ 且对任意的\ \ i \in N,\ \ x(i) \geq 0$$

等价于

$$\langle x_Q^*, y \rangle \geq \langle x_Q^*, x \rangle\ \ 当\ \ x, y \in QG\ \ 且对任意的\ \ i \in N,\ \ y(i) \geq x(i)$$

因此

$$\langle x_Q^*, x \rangle \leq \langle x_Q^*, x_N \rangle = 1\ \ 对任意的\ \ x \in Q\ \ 且对任意的\ \ i \in N,\ \ |x(i)| \leq 1.$$

注意, 赋予 ℓ^∞ 范数 $\|\cdot\|$, QG 在 span$G$=span$(D-D) \subset \ell^\infty$ 中稠密. 我们可以借助取极限继续把 x_Q^* 从 QG 延拓到 span$G$. 最后由 Hahn-Banach 延拓定理得到 ℓ^∞ 上的泛函 x^* 使得

$$\|x^*\| = \|x_Q^*\|_{spanG} = \langle x_Q^*, x_N \rangle = 1$$

和

$$\langle x^*, x_A \rangle = \mu(A)\ \ 对任意的\ \ A \in \mathscr{A}$$

由性质 3.1.6 可知 $x^* \in \partial\|e\|$.

定理 3.1.8 对任意的 $x^* \in \mathscr{D}$, $x^* \circ \pi = \mu$ 定义了 N 上的一个有限可加概率测度.

证明 显然 $(x^* \circ \pi)(N) = \langle x^*, \pi(N) \rangle = \langle x^*, e \rangle = 1$ 和 $(x^* \circ \pi)(\emptyset) = \langle x^*, 0 \rangle = 0$. 因为 x^* 是线性的, 所以 $x^* \circ \pi$ 具有有限可加性. 接下来就是要证对任意的 $A \in \mathscr{A}$ 有 $(x^* \circ \pi)(A) \geq 0$. 但是这是很明显的, 因为

$$(x^* \circ \pi)(A) = (x^* \circ \pi)(N) - (x^* \circ \pi)(N \backslash A) = 1 - (x^* \circ \pi)(N \backslash A) \geq 0.$$

有定理 3.1.7 和定理 3.1.8, 我们得到下面的有限可加概率测度的表示理论.

定理 3.1.9 $\mathscr{P}=\mathscr{D}\circ\pi$，其中 $\mathscr{D}\circ\pi=\{x^*\circ\pi : x^*\in\mathscr{D}\}$.

§ 3.2 统计测度的性质

令 $\mathscr{S}$ 表示定义在 N 上的所有统计测度. 令 $q:\ell^\infty\to R$ 定义为

$$q(x)=\lim_n\sup|x(n)|,\ \ x=(x(n))\in\ell^\infty$$

即 q 是定义在 $\ell^\infty/c_\circ$ 上的商范数. 下面是统计测度的表示定理.

定理 3.2.1 令 $\mathscr{D}_q=\partial q(e)$. 则有 $\mathscr{S}=\mathscr{D}_q\circ\pi$.

证明 因为对任意的 $x\in\ell^\infty$ 有 $q(x)\le\|x\|$, 因为 $q(e)=\|e\|=1$, 就有 $\partial q(e)\subset\partial\|e\|$. 由定理 3.1.9, 有 $\mathscr{D}_q\circ\pi\subset\mathscr{D}\circ\pi=\mathscr{P}$. 很显然对 $\mathscr{D}_q\circ\pi$ 中任意的 μ 均为统计测度, 因此 $\mathscr{D}_q\circ\pi\subset\mathscr{S}$.

要证 $\mathscr{S}\subset\mathscr{D}_q\circ\pi$, 注意到 $(\ell^\infty)^*=\ell^1\oplus c_\circ^\perp$(见参考文献 [57].), 再由定理 3.1.7, 对任意的由统计测度 μ 所决定的 $\mathscr{D}$ 中的线性泛函 x^* 均包含于 $c_\circ^\perp$. 因此 $\mathscr{S}\subset(\mathscr{D}\circ\pi)\bigcap(c_\circ^\perp\circ\pi)=\mathscr{D}_q\circ\pi$.

定理 3.2.2 (有限可加概率测度的分解定理)

$$\mathscr{P}=co(\mathscr{C}\bigcup\mathscr{S})\ \ \text{和}\ \ \mathscr{C}=\bar{co}(\delta_j)_{j=1}^\infty$$

其中, $\mathscr{C}$ 为定义在 N 上的可数可加概率测度, $\bar{co}$ 为 $\mathscr{A}$ 上一致收敛拓扑算子的闭凸核, δ_j 为定义在 N 上的退化的概率测度, 即对任意的 $i,j\in N$ 有 $\delta_j(i)=\delta_{ij}$.

证明 因为 $\mathscr{D}=\partial\|e\|=\partial\|e\|\bigcap(\ell^1\bigoplus c_\circ^\perp)=co((\partial\|e\|\bigcap\ell^1)\bigcup(\partial\|e\|\bigcap c_\circ^\perp))$, $\partial\|e\|\bigcap c_\circ^\perp=\mathscr{D}_q$, 又因为 $C\equiv\partial\|e\|\bigcap\ell^1$ 等于 $\{e_i\}_{i=1}^\infty(\ell^1$ 的标准单位基) 的范数的闭凸核. 所以 $C\circ\pi^{-1}=\mathscr{C}$.

推论 3.2.3 对每个有限可加概率测度 μ 均有如下唯一的分解

$$\mu=\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta,\quad \lambda=\sum_{i=1}^\infty\mu(i)$$

对某个 $\alpha\in\mathscr{C}$ 和 $\beta\in\mathscr{S}$.

证明 因为 α 为可数可加的测度, β 为统计测度再由定理 3.2.2, 有 $\sum_{i=1}^\infty\mu(i)=\lambda\sum_{i=1}^\infty\alpha(i)=\lambda$.